不正確な信号先験確率の見積もりに対する量子測定BWSRMのロバスト性

情報科学学科　井上 裕斗　　　指導教員：臼田 毅

1　はじめに

光通信方式が実用化されて以降，光通信の潜在能力を完全に引き出すために，光の本質である量子効果に目を向ける必要があり，量子通信が注目されている．量子通信においては，できるだけ良い量子測定を用いることで量子雑音の影響を抑制することができる．この量子測定に対する数学的な記述は正作用素値測度 (positive operator-valued measure : POVM) により与えられる [1]．このように，どのような測定過程を用いるかを追求することが，究極の性能を持つ光通信の実現のために本質的であり，最適な測定に関する研究がこれまで数多くなされてきた．

本稿では，重みを最適化することで任意の先験確率を持つ信号に対して最適な測定を与えることができる BWSRM (Belavkin weighted square-root measurement) に着目する．[2] では，信号と先験確率を固定した場合について，いくつかの特定の重みに関する BWSRM の議論がなされている．しかしながら，常に先験確率を正確に見積もることができるとは限らない．そのため，本稿では，もっとも基本的な 2 元純粋状態信号に対し，見積もった先験確率の真値からのずれに対する BWSRM のロバスト性を考察する．

2　BWSRM

測定結果が 2 値である量子測定は，POVM $M = \{M_1, M_2\}$ を用いて表される．各 M_k は決定作用素と呼ばれ，以下の条件を満たす．

$$M_1 + M_2 = I,\quad M_k \geq 0,\quad (k = 1, 2) \tag{1}$$

ただし，I は恒等作用素である．ここで，2 元の純粋量子状態信号を $\rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|, \rho_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ とすると BWSRM の決定作用素は，以下の様に定義される．

$$\begin{aligned} M_k = {} & \Big(\sum_{\ell} W_\ell |\psi_\ell\rangle\langle\psi_\ell|\Big)^{-1/2} \\ & \times W_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \Big(\sum_{\ell} W_\ell |\psi_\ell\rangle\langle\psi_\ell|\Big)^{-1/2} \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，W_k は重みである．本稿では，特に，$r > 0$ に対して，$W_k = p_k^r$ である場合を考える．ただし，p_k は各信号の先験確率である．このような W_k を用いた BWSRM は特に，Belavkin power-weighted square-root measurement と呼ばれる．

3　各測定での誤り率

量子最適測定を用いた際に達成される最小の誤り率 $P_{\rm fail}^{\rm opt}$ は以下のようになる [1]．

$$P_{\rm fail}^{\rm opt}(\{p_k\}) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - p_1 p_2 \, |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2} \tag{3}$$

また，BWSRM を用いた場合の 2 元信号に対する誤り率は，

$$P_{\rm fail}^{\rm weighted}(\{p_k\}) = \frac{(p_1 W_2 + p_2 W_1)\cos^2\theta}{W_1 + W_2 + 2\sqrt{W_1 W_2}\,|\sin\theta|} \tag{4}$$

で与えられる．ただし，$\cos\theta = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|$ である．

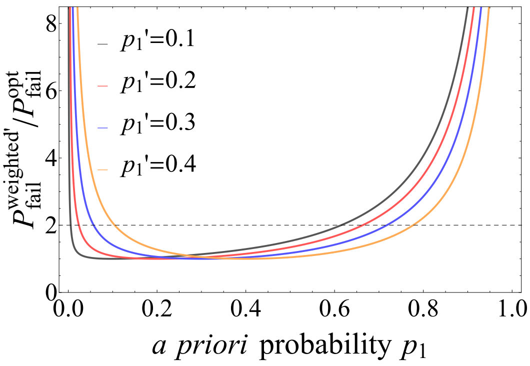

図 1　BWSRM のロバスト性

本稿では，受信機で見積もった先験確率 p'_k と実際の先験確率 p_k に誤差が生じる場合を想定する．その際の重みは，受信機で見積もった先験確率に対して最適な重みを達成する r' を用いて $W'_k = (p'_k)^{r'}$ で表現される．このとき BWSRM を用いた場合の 2 元信号に対する誤り率は，

$$P_{\rm fail}^{\rm weighted'}(\{p_k\}) = \frac{(p_1 W'_2 + p_2 W'_1)\cos^2\theta}{W'_1 + W'_2 + 2\sqrt{W'_1 W'_2}\,|\sin\theta|} \tag{5}$$

で与えられる．

4　BWSRM のロバスト性

図 1 は，$\theta = \pi/4$ における各 p'_1 での最小誤り率に対する誤り率の比を示している．グラフより，真の先験確率と見積もった先験確率とのズレが大きいほどその比は最小値 1 を基準に増加していくことが分かる．また，真の先験確率が見積もった先験確率よりも小さい場合に比べ，大きい場合の方が，真値からのずれへの耐性が大きいことがわかる．

続いて，定量的にロバスト性を評価するための基準の例として，比の値が 2 以下，つまり最適測定に比べ，誤り率が 2 倍以下となる点に着目する．破線と各 p'_1 の実線との交点に着目すると，比の値が 2 以下となる p_1 の範囲はいずれの p'_1 の場合も共通して十分に広いことが確認できる．

5　まとめ

本稿では，信号先験確率の見積もりが正確でなかった場合，つまり，真の先験確率に対し，見積もりが誤っていた場合に，BWSRM による誤り率が最適値からどの程度劣化するのかを考察した．結果として，2 元純粋状態信号に対して BWSRM は，ある程度見積もりに誤りがあっても，誤り率は最小値の 2 倍以下に押さえられるといったロバスト性を有していることが明らかとなった．

参考文献

[1] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic Press, New York, (1976).

[2] J. Tyson, Phys. Rev. **A79**, 032343, (2009).

公表論文

1. 井上 裕斗, 王 天澄, 臼田 毅, 平成 30 年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会, J3-8, (2018).